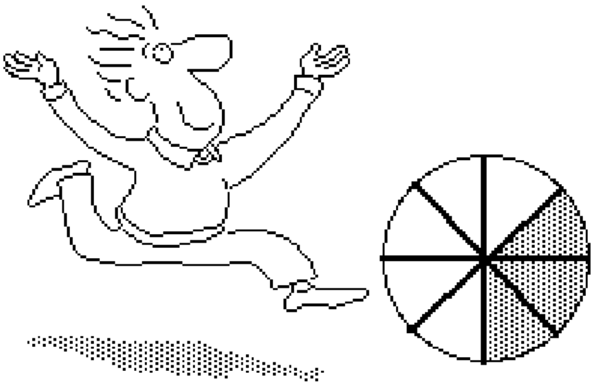
«Es imposible aprender matemáticas sin resolver ejercicios»

Godement. Matemático

1

4°ESO

ACAD



NÚMEROS REALES

Ábaco
Rueda medir. Irracionales
Calculadora. Prioridad. Fracciones. Irracionales
Propaganda Eroski. A4
Tabla adivinación edad.

ÍNDICE:

INTRODUCCIÓN

¿Qué diferencia hay entre una foto y la otra?

1. NÚMEROS IRRACIONALES

NÚMERO

DEF: Expresión simbólica de una cantidad. Es la relación numérica que guarda dicha cantidad respecto de una unidad. Es decir, su medida.

Ejemplo: 5 días, 4 piedras, ½ hora…

RACIONALES

DEF: Se llaman fracciones al cociente o razón −racionales− entre dos números enteros, siendo el segundo distinto de cero. Las fracciones resultan de la división en partes enteras de la unidad de referencia. La expresión de una cantidad racional es del tipo: $\frac{a}{b}$; siendo a, b $\in$ **Z.**

Se llaman números racionales a la ampliación de los enteros con las fracciones. Y se representan por la letra Q.

NÚMEROS IRRACIONALES

DEF: Se llaman números irracionales a los que no son racionales.

DEF: Se llaman números reales a todos los números que representan algún punto de la recta numérica. Todos los números que se pueden expresar con un número finito o infinito de cifras decimales.

Hay números que no se pueden expresar como partes enteras de la unidad. Por eso se les llama IRRACIONALES. Dicho en el sentido clásico, no existe unidad que sirva para medir ambas cantidades a la vez.

Forma decimal

• Una forma sencilla de localizar un número irracional sería ir poniendo cifras decimales no periódicas: 5,101001000100001…

Como es lógico estos números también tienen su representación en la recta numérica; es más, vendrían a tapar los huecos que dejan los racionales.

Por la densidad de los números racionales podemos aproximar indefinidamente un número irracional a través de números racionales.

2. REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS REALES. LA RECTA REAL

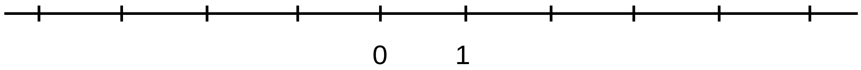
Para representar un número en la recta real, podemos hacerlo por el método de Tales si se trata de un número racional, por Pitágoras si se trata de una raíz cuadrada.

Para representar otros números irracionales deberemos recurrir a intervalos que contengan al número. El valor de la izquierda nos dará una aproximación por defecto y el de la derecha por exceso.

También lo haremos así para dar un valor decimal aproximado del número en cuestión.

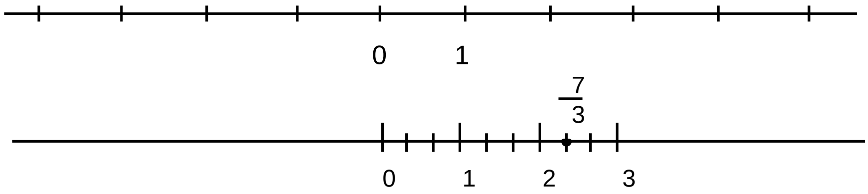
REPRESENTACIÓN GRÁFICA

• La **RECTA NUMÉRICA** es una recta en que hemos situado el 0 y la unidad (el 1). Con estos dos puntos se puede asignar un punto a todo número. Nos permite una visualización geométrica de los números.



• Para representar una fracción en la recta numérica se divide la unidad en tantas partes como indique el denominador y se toman tantas como indique el numerador.

• Por ejemplo, así se representa 7/3



APROXIMACIÓN DECIMAL DE UN NÚMERO REAL. INTERVALOS ENCAJADOS

Empezaremos con el juego del número. Un voluntario y se van anotando en la pizarra.

Obtenemos una sucesión de intervalos que se van aproximando sucesivamente al valor real. Unidades, décimas, centésimas,…

El error que se comete cada vez es más pequeño.

Cada intervalo está contenido en el anterior.

Se llama sucesión o secuencia de intervalos encajados.

Por ejemplo, podemos probar con $\sqrt{2}$ irlo haciendo a mano.

Lo único que podemos asegurar es que su valor real está comprendido entre tal y tal valor.

Intervalo	Aproximación por		Error máximo	Redondeo
	Defecto		Exceso	Mejor aproximación
[1; 2]	1		2	1
[1,4; 1,5]	1,4		1,5	1,4
[1,41; 1,42]	1,41		1,42	

Para poder redondear a una determinada cifra hay que conocer siempre el valor de la siguiente. Por ejemplo, explicarlo con los €.

3. INTERVALOS Y SEMIRRECTAS

Aprovechar para practicar lenguaje simbólico. Definiciones…

ORDEN EN LOS NÚMEROS

Se llama desigualdad:

$a < b$ si $b - a > 0$

Por ejemplo, ¿Quién es mayor 3/4 o 4/5?

INTERVALOS

Son los conjuntos de números comprendidos entre dos valores fijos que se llaman extremos del intervalo

Intervalo abierto (a, b)

(a, b) = {x ∈ R / a < x < b}

no entran los extremos

Intervalo cerrado [a, b]

[a, b] = {x ∈ R / a ≤ x ≤ b}

Entran los extremos

Ejemplos

3 ∈ (1, 5) ; 2'5 ∈ (1, 5) ; 1 ∉ (1, 5)

Intervalos semiabiertos o semicerrados. abierto por la derecha

[a, b) = {x ∈ R / a ≤ x < b}

semiabierto por la derecha

Intervalos con extremo infinito. semirrectas.

[a, +∞) = {x ∈ R / a ≤ x}

De "a" en adelante

(–∞, b) = {x ∈ R / x < b}

De "b" hacia atrás

4. RAÍCES Y RADICALES

DEF: Es la operación inversa de la potenciación.

$\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$	a: Radicando n: Índice de la raíz b: Radical.

Potencias	Radicales
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$
$\dfrac{a^n}{a^m} =$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$(a^n)^m =$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$(a \cdot b)^n =$	$(\sqrt{a^n})^m = \sqrt{a^{n \cdot m}}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n =$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
$a^1 =$	$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \cdot p]{a^{n \cdot p}}$ $\qquad \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m/p]{a^{n/p}}$
$a^0 =$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
$a^{-n} =$	$\sqrt[1]{a} = a$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} =$	

Es la operación inversa de la potenciación.

$\sqrt[n]{a}$ **= b** si $b^n = a$	a: Radicando n: Indice de la raíz

Radical	Valor	Explicación	Radical	Valor	Explicación
$\sqrt[3]{8}$	2	$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{64}$		
$\sqrt[3]{27}$			$\sqrt[5]{32}$		
$\sqrt[3]{125}$			$\sqrt[3]{0'001}$		
$\sqrt[2]{0,04}$			$\sqrt{0,01}$		
$\sqrt[1]{5}$			$\sqrt[3]{0}$		

ESTIMACIÓN DE RADICALES

Llamaremos **estimar una raíz** a dar una aproximación de ella.

Por ejemplo, $\sqrt{178} \approx 13'4$. Raíz de 178 aproximadamente es 13'4.

RADICALES EN FORMA DE POTENCIA

El valor de una raíz equivale a la potencia que resulta de dividir el exponente del radicando entre el índice de la raíz.

Explicación: $\left(a^{\frac{p}{n}}\right)^n = a; luego, \sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$

Por ejemplo:

$\sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}}$	$\sqrt[2]{2^{-8}}$	$\sqrt[7]{5^3}$	$\sqrt[6]{5}$

Para operar también se puede pasar a esta forma previamente.

Expresa ahora en forma de radical:

$5^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{5^3}$	$3^{\frac{1}{2}}$	$7^{\frac{5}{4}}$	$2^{\frac{5}{3}}$

• Efectúa:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$$

• Por el mismo procedimiento hacemos lo siguiente:

$$\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{8}$$

EQUIVALENCIA DE RADICALES

Se obtiene una raíz equivalente multiplicando por el mismo número al índice de la raíz que al exponente del radicando.

Lógicamente también se obtiene otra equivalente al dividir por el mismo valor.

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m\cdot p]{a^{n\cdot p}} \qquad \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m/p]{a^{n/p}}$$

Completa la siguiente tabla para que sean ciertas las igualdades. En las primeras se indica la posición para ayudar. En el resto averígualo tú:

$\sqrt{2} = \sqrt[[\ \ ]]{2^3}$	$\sqrt[2]{5} = \sqrt[[\ \ ]]{25}$	$\sqrt[5]{2^3} = \sqrt[10]{2^{[\ \ ]}}$	$\sqrt[10]{2^4} = \sqrt[5]{2}$
$\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)} = \sqrt[6]{\left(\frac{2}{3}\right)}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[9]{\frac{2}{3}}$	$\sqrt[8]{\frac{1}{2^6}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

EXTRAER FACTORES

Para simplificar una raíz

Raíz	Descom	Simplificación	Final
$\sqrt[3]{40} =$	$\sqrt[3]{2^3\cdot 5}$	$\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{5}$	$2\cdot\sqrt[3]{5}$
$\sqrt{80} =$	$\sqrt[2]{2^4\cdot 5}$	$\sqrt[2]{2^4\cdot 5} = \sqrt[2]{2^4}\cdot\sqrt[2]{5}$	$\sqrt[2]{2^4\cdot 5} = 4\cdot\sqrt[2]{5}$
$\sqrt[2]{160} =$			
$\sqrt[3]{128} =$			
$\sqrt{405} =$			
$\sqrt[3]{600} =$			

Hay que separar los factores que tengan de exponente un múltiplo del índice. De lo contrario no tienen potencia suficiente para salir de la raíz.

OPERACIONES CON RADICALES. VER PARALELISMO CON POTENCIAS.

suma y resta de radicales.

Tienen que ser radicales semejantes para poder simplificar la expresión..

Por un lado,	Sin embargo,
$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$	$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

Luego, la raíz de una suma **no** es igual a la suma de las raíces. Ni la resta tampoco.

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

• Simplifica la expresión agrupando los radicales semejantes:

$5\sqrt{3} - \sqrt{2} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 4\sqrt{2} =$

Simplificación de sumas de radicales idénticos:

Es claro que: $4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = (4 + 5 - 7)\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Podemos pues simplificar sumas que contengan radicales idénticos agrupándolos.

Según esto simplifica extrayendo previamente los factores que sea posible:

$\sqrt{8} + \sqrt{50} + \sqrt{18} =$

producto y cociente de radicales.

De una parte,	También,
$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$	$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$

Luego, la raíz de un producto **es igual** al producto de las raíces

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

• Simplifica:

$\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} =$

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} =$

División

Por un lado,	También,
$\sqrt{\frac{100}{4}} = \sqrt{25} = 5$	$\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}} = \frac{10}{2} = 5$

Luego, la raíz de un cociente **es igual** al cociente de las raíces

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

• Simplifica:

$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} =$

$$\frac{5\sqrt{12}}{\sqrt{3}} =$$

$$\frac{10\sqrt[3]{40}}{2\sqrt[3]{5}} =$$

Simplificación de producto y cociente de radicales:

Para multiplicar radicales es necesario que **tengan el mismo índice**.
Para ello hay que reducirlos previamente a índice común.

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[2]{5} = \sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{2^2\cdot 5^3} = \sqrt[6]{500}$$

Simplifica el siguiente producto:

$$\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt{2} =$$

$$\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[2]{2}} =$$

Potencias y raíces de radicales

El exponente de una raíz pasa multiplicando al exponente del radicando.

$$\left(\sqrt{a^n}\right)^m = \sqrt{a^{n\cdot m}}$$

• Simplifica:

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 =$$

$$\left(\sqrt{3}\right)^4 =$$

$$\left(\sqrt[4]{3^2}\right)^2 =$$

Radicales

Una raíz de otra raíz equivale a la raíz que resulta de multiplicar sus índices.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

• Simplifica la expresión:

$$\left(\sqrt[2]{\sqrt[3]{2}}\right)^6 =$$

$\sqrt[3]{\sqrt[2]{4^3}} =$

Racionalización

Es el proceso de eliminar un radical de un denominador de una fracción mediante el paso a otra equivalente.

Basta multiplicar en el numerador y en el denominador por un radical adecuado

Ej:

$$\frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

• Racionaliza: $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

En el caso de que el denominador contenga una resta simplificaremos utilizando el conjugado.

Ejemplo:

$$\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-2}$$

$$\frac{14}{\sqrt[3]{7}}$$

5. APROXIMACIONES Y REDONDEO. LO VEN EN FÍSICA.

T04_03a Aproximación numérica. Error absoluto y relativo. Redondeo.

Ya que los nºs irracionales NO admiten una expresión racional no podemos dar un valor decimal exacto.

Así tenemos que trabajar con aproximaciones.

La manera de controlar el ERROR cometido es dar una acotación. Es decir, valor por defecto y exceso.

P.ej: $3'14 < \pi < 3'15$ ó

$3'1415 < \pi < 3'1416$

La segunda es una estimación más precisa.

Error absoluto:

Diferencia en valor absoluto entre la aproximación y el valor real.

$|3'14 - \pi|$ ó $|3'1416 - \pi|$

Error relativo:

La razón entre el error absoluto y el valor real.

$$\frac{|3'14-\pi|}{\pi} \quad \text{ó} \quad \frac{|3'1416-\pi|}{\pi}$$

Redondeo:

Es la mejor de las dos aproximaciones por defecto o exceso.

Si la cifra siguiente a la que vamos a tomar es inferior a 5 se deja igual.

Si es 5 o superior se aumenta en 1

$\pi \cong 3'14159264\ldots$

3'14 redondeo con 2 decimales.

3'1416 redondeo con 4 decimales.

6. NOTACIÓN CIENTÍFICA. COTA DE ERROR. CALCULADORA.

Trabajar con emulador de calculadora.

CIFRAS SIGNIFICATIVAS

El número de cifras con valor exacto que utilizamos para dar un resultado se llaman cifras significativas. Cuando decimos que mi pueblo tiene 23 000 habitantes, no queremos decir que tenga 23 mil habitantes justos sino que son 23 000 aproximadamente. Sólo le atribuimos valor, probablemente, a las dos primeras cifras, en este caso. Es decir, estaríamos dando 2 cifras significativas.

El resultado de un problema basta darlo con 2 ó 3 cifras significativas.

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Una cantidad expresada de esta manera tiene dos partes:

$1'53\cdot$	10^8
cifras significativas	**potencia de 10**

MUY IMPORTANTE:
Las cifras significativas **sólo** llevarán **1 cifra entera**

OPERACIONES EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

Producto y división teniendo tan sólo en cuenta sus dos factores.

Suma y resta ajustando previamente las potencias de 10 para que tengan el mismo exponente. Mejor aun sacando factor común la menor potencia.

$$\frac{2\cdot 10^{-7}-3\cdot 10^{-5}}{4\cdot 10^{6}+10^{5}}=\frac{\left(2-3\cdot 10^{2}\right)\cdot 10^{-7}}{\left(4\cdot 10+1\right)\cdot 10^{5}}=\frac{-298\cdot 10^{-7}}{41\cdot 10^{5}}=\dots$$

Con la calculadora.

7. LOGARITMOS

Como introducción se podía ver:

Hallar 'x' en las siguientes expresiones:

$x^3=8;\ x^3=15;\ x^5=17$. Lo hacemos con las raíces. Podemos usar calculadora.

$10^x=100; 10^x=45; 10^x=315$. Aquí necesitamos una operación nueva. Ver calculadora.

En un caso se trata de averiguar la base, en el otro el exponente.

Es el exponente de un número en una determinada base.

DEF: El logaritmo de un número es el exponente de dicho número en una base determinada. Se trata de la operación inversa de la exponenciación.

$$\log_a P = x \Leftrightarrow a^x = P$$

Es una operación que no ha evolucionado en un símbolo determinado.

¿Por qué simplifican los cálculos?

$8\cdot 4=2^3\cdot 2^2=2^{3+2}$. Luego el producto de números se convierte en suma de sus logaritmos.

$\frac{8}{4}=\frac{2^3}{2^2}=2^{3-2}$. Luego la división se convierte en resta.

$8^2=\left(2^3\right)^2=2^{3\cdot 2}$. Luego la potencia se convierte en producto.

$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2^{3/3}$. Luego la raíz se convierte en división.

PROPIEDADES

- $\log_a(P\cdot Q)=\log_a P+\log_a Q$
- $\log_a \frac{P}{Q}=\log_a P-\log_a Q$
- $\log_a P^n=n\cdot\log_a P$
- $\log_a \sqrt[n]{P}=\frac{\log_a P}{n}$
- $\log_a a=1$
- $\log_a 1=0$

Ejemplos

$\log_{10}100$; $\log_3 81$; $\log_2 1$; $\log_2 0$; $\log_{1/2}4=x$; ...

Los números negativos y el cero no tienen. Tampoco tiene sentido utilizar bases negativas.

PROPIEDADES DESARROLLO (OPTATIVO)

• $\log_a(P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$

DEM

Supongamos que P = a^x ; es decir, que x = $\log_a P$.

De igual forma que Q = a^y ; es decir, que y = $\log_a Q$.

Es claro que

$$P \cdot Q = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Luego,

$$\log_a(P \cdot Q) = x + y = \log_a P + \log_a Q$$

• $\log_a \frac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q$

• $\log_a P^n = n \cdot \log_a P$

• $\log_a \sqrt[n]{P} = \frac{\log_a P}{n}$

• $\log_a a = 1$

• $\log_a 1 = 0$

CAMBIO DE BASE

La calculadora suele tener dos logaritmos: log (base 10) y ln (base "e"), llamados logaritmos neperianos.

Para poder hallar otros logaritmos hemos de hacer un cambio de base.

Ejemplo

Imaginemos que tenemos que hallar $\log_2 30$.

Vamos a llamarlo x. Es decir, $\log_2 30 = x$

Por tanto, aplicando logaritmos decimales en esta igualdad tendremos

$$30 = 2^x \rightarrow \log 30 = \log 2^x \rightarrow \log 30 = x \log 2 \rightarrow x = \frac{\log 30}{\log 2}$$

En general,

$$\log_a P = \frac{\log_{10} P}{\log_{10} a}$$

ECUACIONES EXPONENCIALES

Una de las utilidades de los logaritmos es la posibilidad de despejar exponentes.

Ejemplo: resolver $2^x = 7$.

aplicar logaritmos

$$B = \frac{x \cdot y \cdot z}{t}$$

quitar logaritmos

log B = 2· log x – log y + log z

8. APÉNDICE

LA DIAGONAL DEL CUADRADO

Por ejemplo, en la terna pitagórica 3, 4 y 5 vemos cómo están las razones de proporcionalidad entre los lados de un triángulo rectángulo.

El susto se lo llevaron cuando descubrieron las razones inconmensurables. Por ejemplo, entre la hipotenusa y el cateto de un triángulo isósceles rectángulo. También entre la diagonal y el lado de un pentágono. Así la unidad no servía para medir esta proporción.

• También les ocurre a las raíces no enteras, de cualquier índice: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; …etc.

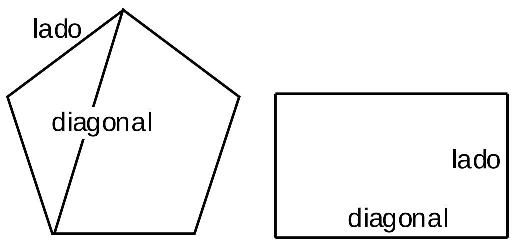
Por ejemplo al número $\sqrt{2}$ = 1'414213562…le pasa lo mismo que a π que tiene infinitas cifras decimales no periódicas. También a $\sqrt[3]{5}$, por ejemplo.

EL NÚMERO ÁUREO

• Otro número muy famoso e importante en el mundo del arte es el áureo:

Mide la proporción entre la diagonal de un pentágono y su lado.

Se piensa que fue el primer número irracional que se descubrió y que dejó perplejos a los pitagóricos.



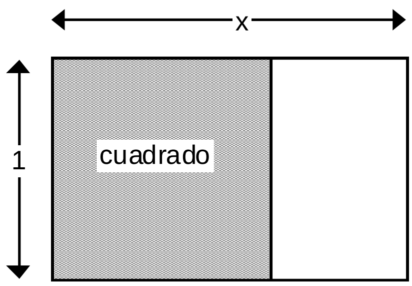
• Los griegos lo consideraron como un canon de belleza.

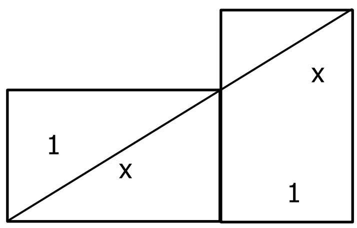
Su peculiaridad está en que llevando el lado menor sobre el mayor el rectángulo "residual" es semejante al total.. Es decir, sus lados están en la misma proporción.

Con ello se daría un proceso infinito.

Actualmente la tarjeta del cajero está en proporción áurea.

Las tarjetas de crédito, los carnés de identidad tienen esta proporción.



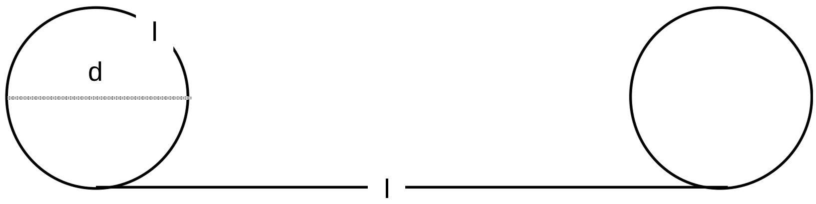


Vamos a determinar su valor: $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988...$

Pedir la resolución según está el dibujo. Es decir, observando la semejanza de los triángulos rectángulos.

EL NÚMERO π

• El número π es la proporción entre una circunferencia y su diámetro.



$$\frac{l}{d} = \pi$$

Tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Estas son sus primeras 20 cifras decimales: π = 3'14159265358979323846…

Esto se consigue aproximando la circunferencia por el perímetro de polígonos regulares del mismo radio.

Los judíos (a.C.) utilizaban $\pi = 3$ y los babilonios sabían que $\frac{21}{7} < \pi < \frac{22}{7}$

La mejor aproximación, entre los griegos, fue la dada por Arquímedes, el cual dijo que estaba comprendido entre los números $\frac{22}{7}$ y $\frac{223}{71}$

En la India utilizaron las fracciones $\frac{49}{16}$ y $\frac{3927}{1250}$.

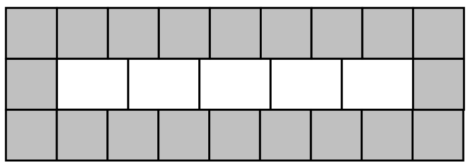
Un matemático en el año 1600 encontró la fracción $\frac{355}{113}$ como aproximación de π.

Cuando hablamos de aproximación nos referimos a algo similar a lo que hacemos para pasar de euros a pesetas:

$$1€ = 166'386 \; Pts \approx \frac{1000}{6} \Leftrightarrow 6 \; € \approx 1000$$

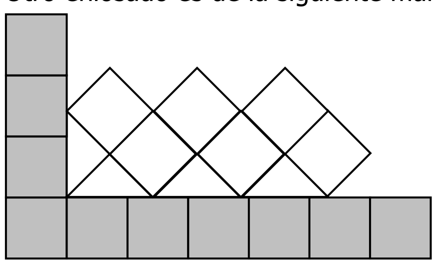
ENLOSADO

En un suelo vemos la siguiente composición:



Sabiendo que las baldosas cuadradas tienen de lado 1. ¿Cuál es la medida de la baldosa rectangular?

Otro enlosado es de la siguiente manera:



Como construirías un rectángulo de dimensiones mínimas para que ajustase lo mejor posible. Se entiende que utilizando cuadrados y las escuadras del dibujo.

LOGARITMOS. ORIGEN

Surgieron como un método abreviado de cálculo. John Napier (Neper) en el siglo XVII construyó unas tablas en que a cada número le asignaba su exponente en la siguiente base: $\left(1+\frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \approx e$. El objetivo era simplificar los cálculos sobre todo astronómicos, trigonométricos. Después se ha visto que también describen fenómenos físicos y resuelven numerosos problemas matemáticos.

Tomemos por ejemplo, para entendernos mejor, la base 2.

Número	Potencia	Exponente (Logaritmo)
32	2^5	5
16	2^4	4
8	2^3	3
4	2^2	2
2	2^1	1
1	2^0	0
½	2^{-1}	−1
¼	2^{-2}	-2
0	No existe	No existe
-2	No existe	No existe

Diremos que $\log_2 16 = 4$ porque $2^4=16$, etc. Poner todos.

Según hemos dicho el logaritmo y la exponencial son funciones inversas.

$$3 \underset{\log_2 8}{\overset{2^3}{\rightleftarrows}} 8$$

9. EJERCICIOS Y PROBLEMAS

01 NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

1. ¿Cómo es un número irracional desde el punto de vista decimal?

Infinitas cifras decimales no periódicas

2. ¿En qué consiste la densidad de los números racionales? Pon un ejemplo.

Entre dos números racionales siempre hay otro. Luego hay infinitos.

Entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$ $\quad \frac{\frac{3}{5}+\frac{4}{5}}{2} = \frac{\frac{9}{5}}{2} = \frac{9}{10}$ ✓

3. Calcular un número racional que esté entre 3/7 y 4/7.

$$\frac{\frac{3}{7}+\frac{4}{7}}{2} = \frac{\frac{7}{7}}{2} = \frac{1}{2}$$

4. Una pizza tiene un diámetro de 30 cm y cuesta 1.095 Pts. ¿Cuánto debería costar una de 40 cm de diámetro? Suponemos que el grueso es idéntico. Darse cuenta de que el precio es proporcional a la superficie en este caso.

El precio es proporcional a la superficie. Luego

$1095 \quad \pi \cdot 30^2$

$x \quad \pi \cdot 40^2$

$$x = \frac{1095 \cdot \cancel{\pi} \cdot 40^2}{\cancel{\pi}\, 30^2} = 1095 \cdot \frac{4^2}{3^2} = \frac{1095 \cdot 16}{9} = 1947 \text{ Pts}$$

02 LA RECTA REAL

5. Expresa en forma de intervalo E(1, 5)

$$(1-5,\ 1+5)=(-4,6)$$

6. Expresa en forma de desigualdad: (1, +inf); [–2, 7)

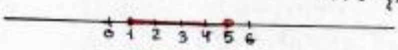
$$(1,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ 1<x\}$$
$$[-2,7)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ -2\leq x<7\}$$

7. Escribe los conjuntos siguientes en forma de intervalo o semirrecta y en forma de desigualdad. Represéntalos en la recta real.

a. El conjunto de todos los números reales mayores o iguales que 1 y menores que 5.
b. Todos los mayores que 1.
c. Todos los comprendidos entre –1 y 3.
d. Todos los menores que 4 y mayores o iguales que –2.
e. Todos los menores o iguales que 0.
f. Los comprendidos entre –4 y 0 ambos inclusive.

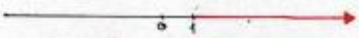
a) El conjunto de todos los números reales mayores o iguales que 1 y menores que 5.

$[1,5)=\{x\in\mathbb{R}/1\leq x<5\}$



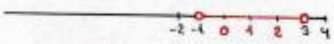
b) El conjunto de todos los números reales mayores que 1.

$(1,\infty)=\{x\in\mathbb{R}/1<x\}$



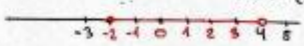
c) El conjunto de todos los números reales comprendidos entre -1 y 3

$(-1,3)=\{x\in\mathbb{R}/-1<x<3\}$



d) El conjunto de todos los números reales menores que 4 y mayores o iguales que -2.

$[-2,4)=\{x\in\mathbb{R}/-2\leq x<4\}$



e) El conjunto de todos los números reales menores o iguales que 0

$(-\infty,0]=\{x\in\mathbb{R}/0\geq x\}$

f) El conjunto de todos los números reales comprendidos entre -4 y 0 ambos inclusive.

$[-4,0]=\{x\in\mathbb{R}/-4\leq x\leq 0\}$

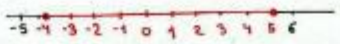
8. Escribe en forma de intervalo o de semirrecta y representa:

$A=\{x/-4\le x\le 5\}$ $B=\{x/x<5\}$

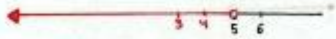
$C=\{x/-5\le x\}$ $D=\{x/0\le x\}$

$E=\{x/0<x<2{,}4\}$ $F=\left\{x/x<\dfrac{11}{3}\right\}$

A. $\{x/-4\le x\le 5\} = [-4,5]$

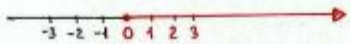


B. $\{x/x<5\} = (-\infty,5)$

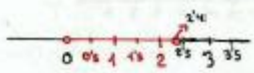


C. $\{x/-5\le x\} = [-5,+\infty)$

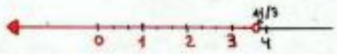
D. $\{x/0\le x\} = [0,+\infty)$



E. $\{x/0<x<2{,}4\} = (0, 2'4)$



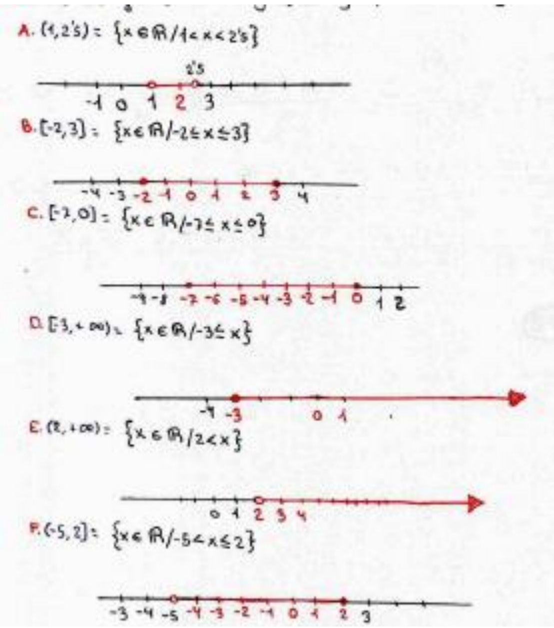
F. $\{x/x<\frac{11}{3}\} = (-\infty, 11/3)$



9. Escribe en forma de desigualdad y representa:

$A=(1;2{,}5)$ $B=[-2,3]$ $C=[-7,0]$

$D=[-3,+\infty)$ $E=(2,+\infty)$ $F=(-5,2]$



03 APROXIMACIONES Y ERRORES

10. Expresa en notación científica:

a) Distancia Tierra – Sol = 150.000 millones de metros
b) Radio del protón = 0, 000 000 000 05 metros
c) Distancia Tierra – Luna = 384 millones de metros
d) Tamaño de un virus = 0, 000 000 002 metros
e) Peso de una bacteria = 0, 000 000 008 4 gramos

11. Dados los números:

A = 175.000.000.000.000 ; B = 3.500.000.000.000 y C = 0,000 000 000 000 125 ,
expresa los números en notación científica para calcular (utilizando calculadora):

$$\frac{A+B}{C}=$$

12. Si $A=3{,}24\cdot10^{6}$, $B=5{,}1\cdot10^{-5}$, $C=3{,}8\cdot10^{11}$ y $D=6{,}2\cdot10^{-6}$, calcula:

$$\left(\frac{A}{B}+C\right)\cdot D=$$

13. Calcula expresando el resultado en notación científica:

a) $\dfrac{(4'58\cdot10^{8})\cdot(3'21\cdot10^{9})}{2\cdot10^{-3}}$

b) $4'53\cdot10^{7}+5'84\cdot10^{5}-3'4\cdot10^{8}$

a) $\dfrac{(4'58 \cdot 10^8) \cdot (3'21 \cdot 10^9)}{2 \cdot 10^{-3}} = \dfrac{14'7 \cdot 10^{17}}{2 \cdot 10^{-3}} = 7'35 \cdot 10^{20}$

b) $4'53 \cdot 10^7 + 5'84 \cdot 10^5 - 3'4 \cdot 10^8 = 453 \cdot 10^5 + 5'84 \cdot 10^5 - 3400 \cdot 10^5 = -2941'16 \cdot 10^5 \simeq -2'9 \cdot 10^8$

14. Una aproximación del número π debida a Mecio (los griegos no conocían la expresión decimal de los números) fue: $\pi = 3 + \dfrac{1}{7 + \dfrac{1}{16}}$. Calcular su valor y el error absoluto y relativo cometido.

$$\pi \simeq 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}} = 3 + \frac{1}{\frac{113}{16}} = 3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113} \simeq$$

$3'14159292\ldots$ la cota de error es $0'0000003$

02 RADICALES

15. Determina el valor de:

$$\text{a) } (-3)^2 \quad \text{b) } 2^{-3} \quad \text{d) } (-2)^3 \quad \text{e) } \frac{1}{2^{-3}} \quad \text{f) } \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \quad \text{g) } \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$$

$$\text{h) } \sqrt{\frac{9}{49}} \quad \text{i) } \sqrt[3]{-125} \quad \text{j) } 3^{2/3} \quad \text{k) } \frac{1}{5^{1/2}} \quad \text{l) } 9^{-1/2} \quad \text{m) } \left(\frac{2}{3}\right)^{-3/2}$$

16. Simplifica las expresiones siguientes al máximo:

$$\text{a) } \frac{2^{-8} \cdot 16^4}{32} = \quad \text{b) } \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{5}{3}} \cdot 2^2 = \quad \text{c) } \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{9}{2}} =$$

17. Pasa las siguientes expresiones de raíces a potencias y después simplifica la potencia resultante:

$$\text{a) } \sqrt{\sqrt[5]{a^4}} = \quad \text{b) } \sqrt{2\sqrt{2}} =$$

18. Pasa las siguientes potencias a su expresión radical y después simplifica el radical al máximo según sus propiedades:

$$\text{a) } \left(a^{5/2}\right)^{2/3} = \quad \text{b) } \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} =$$

19. Opera en forma de potencias y expresa el resultado en forma de raíz:

a) $\dfrac{\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}} =$ b) $\dfrac{a^{3/4}\cdot a^{-2/3}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{a}}} =$

20. Simplifica extrayendo factores de los siguientes radicales:

a) $\dfrac{\sqrt{12x^2y^3z^4}}{3xy} =$ b) $\sqrt[3]{8a^6b^3} =$

21. a) Simplifica este radical al máximo: $\sqrt[3]{32\cdot x^4\cdot y^2}$

b) Introduce dentro del radical los factores: $2x+3y^2\sqrt[4]{2\cdot x\cdot y}$

a) $\sqrt[3]{2^5 . x^4 . y^2} = 2 \cdot x . \sqrt[3]{2^2 . x . y^2}$

b) $2x+3y^2\sqrt[4]{2xy} = 2x+\sqrt{81 . 2 . x . y \cdot y^8} =$

$= 2x+\sqrt{162 . x . y^9}$

22. Expresa en forma de potencia simplificando si es posible: *a*) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; *b*) $\sqrt{a^{1/2}\cdot a^2}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{x^{2/3}} = x^{-2/3}$

b) $\sqrt{a^{1/2} . a^2} = \sqrt{a^{5/2}} = a^{5/4}$

23. Expresa en forma de radical: *a*. $7^{\frac{3}{4}}$ *b*. $2^{\frac{2}{3}}$ *c*. $5^{-\frac{1}{2}}$ *d*. $3^{-\frac{2}{5}}$

a) $7^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{7^3}$; b) $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$

c) $5^{-1/2} = \sqrt{5^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$; d) $3^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^{-2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3^2}}$

24. Extraer en cada caso todos los factores posibles:

$a.\ \sqrt[5]{64} \qquad b.\ \sqrt[3]{243} \qquad c.\ \sqrt[2]{x^4} \qquad d.\ \sqrt{4.a^3}$

25. Introducir factores dentro de un radical. Introducir dentro del radical el factor:

$a)\ 3+4\sqrt[3]{5};\ \ b)\ 2-a\sqrt[3]{a}\ \ c)\ 2\cdot x^3\cdot y^2\sqrt[5]{2\cdot x^3\cdot y^4\cdot z}$

26. Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales:

$a)\sqrt{75};\ \ b)\sqrt[3]{16a^{14}};\ \ c)\sqrt[4]{81a^{14b^7}};\ \ d)\sqrt[5]{128x^{11}y^{18}z}$

27. Introducir factores dentro de un radical. Introducir dentro del radical el factor:

$$a)\ 3+x\sqrt[3]{x^2y};\ \ b)\ 2-2\sqrt[3]{4a}$$

28. Extraer factores de un radical. Extraer en cada caso todos los factores posibles:

$$a.\ \sqrt[5]{64} \qquad b.\ \sqrt[3]{243} \qquad c.\ \sqrt[2]{x^4} \qquad d.\ \sqrt{4.a^3}$$

a) $\sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{2^6} = 2\sqrt[5]{2}$; b) $\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3\sqrt[3]{3^2}$

c) $\sqrt[2]{x^4} = x^2$; d) $\sqrt{4.a^3} = 2a\sqrt{a}$

29. Introducir factores dentro de un radical. Introducir dentro del radical el factor:

$$a)\ 3+4\sqrt[3]{5};\ \ b)\ 2-a\sqrt[3]{a}\ \ c)\ 2\cdot x^3\cdot y^2\sqrt[5]{2\cdot x^3\cdot y^4\cdot z}$$

a) $3+4\sqrt[3]{5} = 3+\sqrt[3]{4^3\cdot 5} = 3+\sqrt[3]{320}$

b) $2-a\sqrt[3]{a} = 2-\sqrt[3]{a^4}$

c) $2x^3y^2\sqrt[5]{2\cdot x^3\cdot y^4\cdot z} = \sqrt[5]{2^5\cdot x^{15}\cdot y^{10}\cdot 2\cdot x^3 y^4\cdot z} =$

$= \sqrt[5]{2^6\cdot x^{18}\cdot y^{14}\cdot z}$

30. Extrae factores de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{3600}$ b) $\sqrt[3]{16x^6}$ c) $\sqrt{\dfrac{28x^5}{75y^3}}$

f) $\sqrt{a^4\cdot b^9}$ g) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{2187}}$ h) $\sqrt[5]{128}$ i) $\sqrt{\dfrac{12}{147}}$

a) $\sqrt{3600} = \sqrt{2^4 3^2 5^2} = 2^2\cdot 3\cdot 5 = 60$

b) $\sqrt[3]{16x^6} = \sqrt[3]{2^4x^6} = 2x^2\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{\dfrac{28x^5}{75y^3}} = \sqrt{\dfrac{2^2\cdot 7x^5}{3\cdot 5^2y^3}} = \dfrac{2x^2}{5y}\sqrt{\dfrac{7x}{3y}}$

d) $\sqrt{a^4\cdot b^9} = a^2b^4\sqrt{b}$

e) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{2187}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{3^7}} = \dfrac{1}{3}\sqrt[6]{\dfrac{1}{3}}$

f) $\sqrt[5]{128} = \sqrt[5]{2^7} = 2\sqrt[5]{2^2} = 2\sqrt[5]{4}$

g) $\sqrt{\dfrac{12}{147}} = \sqrt{\dfrac{2^2 3}{7^2 3}} = \dfrac{2}{7}\sqrt{\dfrac{3}{3}} = \dfrac{2}{7}\sqrt{1} = \dfrac{2}{7}\cdot 1 = \dfrac{2}{7}$

03 OPERACIONES CON RADICALES

31. Opera y simplifica:

$$\sqrt[3]{24} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{192} + 5\sqrt[3]{\frac{3}{125}} =$$

32. Opera y simplifica:

a) $\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}=$ b) $\sqrt{\frac{2}{9}}+\sqrt{\frac{8}{25}}-\sqrt{\frac{2}{225}}=$ c) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2}=$

d) $\frac{\sqrt[4]{36}}{\sqrt[4]{4}}=$ e) $\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[4]{3\cdot 5}=$ f) $\frac{3\sqrt{8}-2\sqrt{18}+2\sqrt{50}}{5\sqrt[3]{2}}=$

33. Calcula y simplifica:

a) $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}+\frac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}-\frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $\sqrt{\frac{2}{5}}-4\sqrt{\frac{18}{125}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{45}}$

d) $\sqrt{125}+\sqrt{54}-\sqrt{45}-\sqrt{24}$

e) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

a) $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}+\frac{3}{2}\sqrt{80}=5\sqrt{5^3}+6\sqrt{5\cdot 3^2}-7\sqrt{2^2\cdot 5}+\frac{3}{2}\sqrt{2^4\cdot 5}=$
$=25\sqrt{5}+18\sqrt{5}-14\sqrt{5}+6\sqrt{5}=35\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}-\frac{21}{5}\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{2^4}+2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2\cdot 3^3}-\frac{21}{5}\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}-$
$3\sqrt[3]{2}-21\sqrt[3]{2}=-20\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{\frac{2}{5}}-4\sqrt{\frac{18}{125}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{45}}=\sqrt{\frac{2}{5}}-4\sqrt{\frac{2\cdot 3^2}{5^3}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2^3}{5\cdot 3^2}}=\frac{1}{1}\sqrt{\frac{2}{5}}-\frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{5}}=$
$\frac{45}{45}\sqrt{\frac{2}{5}}-\frac{108}{45}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{10}{45}\sqrt{\frac{2}{5}}=-\frac{53}{45}\sqrt{\frac{2}{5}}$

d) $\sqrt{125}+\sqrt{54}-\sqrt{45}-\sqrt{24}=\sqrt{5^3}+\sqrt{2\cdot 3^3}-\sqrt{5\cdot 3^2}-\sqrt{2^3\cdot 3}=5\sqrt{5}+3\sqrt{6}-3\sqrt{5}-2\sqrt{6}=$
$=2\sqrt{5}+\sqrt{6}$

e) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{3}\sqrt{2}+2-3+2\sqrt{3}\sqrt{2}-2=4\sqrt{6}$

34. Reducir a radicales semejantes y simplificar:

a) $4\sqrt{12}-\frac{3}{2}\sqrt{48}+\frac{2}{3}\sqrt{27}+\sqrt{75}$ b) $\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{162}-\sqrt[4]{1250}$

c) $7\sqrt{54}-3\sqrt{18}+\sqrt{24}-\frac{3}{5}\sqrt{50}-\sqrt{6}$ d) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{625}$

semejantes y simplificar:

a) $4\sqrt{12}-\frac{3}{2}\sqrt{48}+\frac{2}{3}\sqrt{27}+\sqrt{75}=4\sqrt{2^2\cdot3}-\frac{3}{2}\sqrt{2^4\cdot3}+\frac{2}{3}\sqrt{3^3}+\sqrt{5^2\cdot3}=$

$=8\sqrt{3}-6\sqrt{3}+2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=9\sqrt{3}$

b) $\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{162}-\sqrt[4]{1250}=\sqrt[4]{2^5}+\sqrt[4]{2\cdot3^4}-\sqrt[4]{2\cdot5^4}=2\sqrt[4]{2}+3\sqrt[4]{2}-5\sqrt[4]{2}=0$

c) $7\sqrt{54}-3\sqrt{18}+\sqrt{24}-\frac{3}{5}\sqrt{50}-\sqrt{6}=7\sqrt{2\cdot3^3}-3\sqrt{2\cdot3^2}+\sqrt{2^3\cdot3}-\frac{3}{5}\sqrt{2\cdot5^2}-\sqrt{2\cdot3}=$

$21\sqrt{6}-9\sqrt{2}+2\sqrt{6}-3\sqrt{2}-\sqrt{6}=22\sqrt{6}-12\sqrt{2}$

d) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{625}=\sqrt[3]{2^4}+\sqrt[3]{2^3\cdot5}-\sqrt[3]{2\cdot3^3}+\sqrt[3]{5^4}=2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{5}=$

$-1\sqrt[3]{2}+7\sqrt[3]{5}$

Calcula, mediante su

35. Efectúa el siguiente producto utilizando la expresión de los radicales en forma de potencia: $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[3]{4}$

$\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[12]{2^9}\cdot\sqrt[12]{2^8}=\sqrt[12]{2^{17}}$

36. Realiza la operación y simplifica cuando sea posible:

a) $4\sqrt{27}\cdot5\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt{\frac{27}{8}}$

c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}$

d) $\left(\frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt{8}}\right)^3$

e) $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}$

posible:

a) $4\sqrt{27}\cdot5\sqrt{6}=4\cdot3\sqrt{3}\cdot5\sqrt{2}\cdot\sqrt{3};\ 12\sqrt{3}\cdot5\sqrt{2}\sqrt{3};\ 60\sqrt{2}\sqrt{3};\ \boxed{60\sqrt{6}}$

b) $2\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt{\frac{27}{8}}=4\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{27}{8}}=4\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=6\sqrt{\frac{1\cdot3}{3\cdot2}}=6\sqrt{\frac{3}{6}}=\boxed{6\sqrt{\frac{1}{2}}}$

c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{1}=\boxed{\frac{1}{2}}$

d) $\left(\frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt{8}}\right)^3=\frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt{8^3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^9}}=\frac{1}{\sqrt{2^8}}=\frac{1}{2^4}=\boxed{2^{-4}}$

e) $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{2^3\cdot\cancel{3}}}{\sqrt[3]{\cancel{3}}}=\sqrt[3]{2^3}=\boxed{2}$

37. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[5]{a}$ b) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}$ b) $\sqrt{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{11}}$ c) $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{ab}}$ d) $\sqrt[4]{\frac{5}{12}}:\sqrt[4]{\frac{20}{3}}$ e) $\frac{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[8]{12}}$

a) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[5]{a}=a^{1/2}\cdot a^{1/3}\cdot a^{1/4}\cdot a^{1/5};\left(\frac{30}{60}+\frac{20}{60}+\frac{15}{60}+\frac{12}{60}\right);\ a^{77/60}=$

b) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}^{1/2}\cdot\frac{2}{3}^{1/3}\cdot\frac{3}{2}^{1/4}=\frac{2}{3}^{5/6}\cdot\frac{3}{2}^{1/4}$

c) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}=2^{1/3}\cdot 2^{1/5}\ \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{5}{15}+\frac{3}{15}=\frac{8}{15}\right)\ 2^{8/15}$

d) $\sqrt{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{11}}=\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[6]{11}$

e) $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{ab}}=\frac{a^{1/4}}{a^{1/4}\cdot b^{1/4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{b}}$

f) $\sqrt[4]{\frac{5}{12}}:\sqrt[4]{\frac{20}{3}}=\sqrt[4]{\frac{15}{240}}$

g) $\frac{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[8]{12}}=\frac{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[2]{2}}{\sqrt[8]{2^2\cdot 3}}=\frac{\sqrt[8]{3^2}\cdot\sqrt[8]{2^4}}{\sqrt[8]{2^2\cdot\cancel{3}}}=\sqrt[8]{3}\cdot\sqrt[8]{2^2}=\sqrt[8]{12}$

38. Calcula:

a) $\left(5-\sqrt{5}\right)^2=$ b) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=$

c) $\left(\sqrt{6}+2\sqrt{3}\right)^2=$ d) $\left(3-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right)=$

39. Extraer factores de un radical. Extraer todos los factores posibles de las raíces y simplificar el resultado:

$$5\sqrt{12}+7\sqrt{48}-\sqrt{108}-\sqrt{192}+\sqrt{243}$$

40. Simplifica al máximo la expresión:

$\sqrt{72}-\sqrt{50}+\sqrt{18}-\sqrt{8}+\sqrt{200}$

$$= \sqrt{2^3 3^2} - \sqrt{2.5^2} + \sqrt{2\,3^2} - \sqrt{2^3} + \sqrt{2^3 5^2} =$$

$$= 2.3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2.5\sqrt{2} =$$

$$= 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

41. Simplifica: *a*) $3\sqrt{50} - 5\sqrt{32} + 3\sqrt{98}$ *b*) $3\sqrt{8x^3} - 4\sqrt{72x^3} + 2\sqrt{32x^3}$

$$a)\ 3\sqrt{50} - 5\sqrt{32} + 3\sqrt{98} = 3.\sqrt{2.5^2} - 5.\sqrt{2^5} + 3.\sqrt{2.7^2} =$$

$$= 3.5.\sqrt{2} - 5.4.\sqrt{2} + 3.7\sqrt{2} = 15\sqrt{2} - 20\sqrt{2} + 21\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

$$b)\ 3\sqrt{8x^3} - 4\sqrt{72x^3} + 2\sqrt{32x^3} =$$

$$= 3.\sqrt{2^3.x^3} - 4.\sqrt{2^3.3^2.x^3} + 2.\sqrt{2^5.x^3} =$$

$$= 3.2.x\sqrt{2x} - 4.2.3x\sqrt{2x} + 2.4.x\sqrt{2x} =$$

$$= 6x\sqrt{2x} - 24x\sqrt{2x} + 8x\sqrt{2x} = (6x - 24x + 8x)\sqrt{2x} = -10x\sqrt{2x}$$

42. Simplifica las expresiones siempre que sea posible:

a) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$ *b*) $\sqrt[2]{\sqrt[2]{x}} = 2$ *c*) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{2}}}$ *d*) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}$

a) $(\sqrt[3]{2})^6 = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$

b) $\sqrt[2]{\sqrt[2]{x}} = 2$; $\sqrt[4]{x} = 2$; $x = 2^4 = 16$

c) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{16}{2}}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

d) $\sqrt[3]{4} . \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$

43. Reduce a un solo radical: $a)\,\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[4]{7}}$ $b)\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$

a) $\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[4]{7}} = \frac{\sqrt[12]{7^4}}{\sqrt[12]{7^3}} = \sqrt[12]{7}$; b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = \sqrt[8]{x}$

44. Racionaliza simplificando: *a)* $\frac{6}{\sqrt[3]{2}}$ *b)* $\frac{-12}{\sqrt[5]{9}}$ *c)* $\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ *d)* $\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-3}$

Racionaliza.

a) $\frac{6}{\sqrt[3]{2}} = \frac{6 . \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} . \sqrt[3]{2^2}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}}} = \frac{6\sqrt[3]{4}}{2} = 3\sqrt[3]{4}$

b) $\dfrac{-12}{\sqrt[5]{9}} = \dfrac{-12}{\sqrt[5]{3^2}} = \dfrac{-12\cdot\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}} = \dfrac{-12\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[\cancel{5}]{3^{\cancel{5}}}} =$

$= \dfrac{-12\sqrt[5]{27}}{3} = -4\sqrt[5]{27}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}(4-\sqrt{3})}{(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})} = \dfrac{4\sqrt{3}-3}{16-3} = \dfrac{-3+4\sqrt{3}}{13}$

d) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-3} = \dfrac{(3-\sqrt{3})(\sqrt{6}+3)}{(\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}+3)} = \dfrac{3\sqrt{6}+9-\sqrt{18}-3\sqrt{3}}{6-9} =$

$= \dfrac{3\sqrt{6}+9-3\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{-3} = \dfrac{3(\sqrt{6}+3-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-3} =$

45. Racionaliza y simplifica: $a)\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}};\ b)\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}};\ c)\dfrac{1}{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}$

a) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \dfrac{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{18}}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{18}} = \dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{18}-\sqrt{2}\sqrt{18}}{18} = \dfrac{18\sqrt{3}\sqrt{2}-18\sqrt{4}}{18} = \sqrt{6}-18\sqrt{4}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}} = \dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{12}}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{12}} = \dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{12}+\sqrt{2}\sqrt{12}}{12} = \dfrac{12+2\cdot\sqrt{2}\sqrt{3}}{12} = 1+\dfrac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{3}$

c) $\dfrac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2(3-5)} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{6-10} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-4}$

46. Racionalizar y simplificar:

a) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{5-\sqrt{6}}{5+\sqrt{6}}$

d) $\dfrac{8}{3-\sqrt{5}}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ f) $\dfrac{\sqrt{5}-2}{3-2\sqrt{5}}$

a) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2^2-3} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{(2\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{2}-2\sqrt{3}^2}{2-3} = \dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{2}-2\cdot 3}{-1} = \dfrac{2\sqrt{6}-6}{-1} = -2\sqrt{6}+6$

c) $\dfrac{5-\sqrt{6}}{5+\sqrt{6}} = \dfrac{(5-\sqrt{6})(5-\sqrt{6})}{(5+\sqrt{6})(5-\sqrt{6})} = \dfrac{5^2-10\sqrt{6}+6}{5^2-6} = \dfrac{25-10\sqrt{6}+6}{25-6} = \dfrac{31-10\sqrt{6}}{19}$

d) $\dfrac{8}{3-\sqrt{5}} = \dfrac{8(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \dfrac{24+8\sqrt{5}}{3^2-5} = \dfrac{24+8\sqrt{5}}{4} = 6+2\sqrt{5}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})} = \dfrac{2-2\sqrt{2}\sqrt{5}+5}{2-5} = \dfrac{7-2\sqrt{10}}{-3}$

f) $\dfrac{\sqrt{5}-2}{3-2\sqrt{5}} = \dfrac{(\sqrt{5}-2)(3+2\sqrt{5})}{(3-2\sqrt{5})(3+2\sqrt{5})} = \dfrac{3\sqrt{5}+2\sqrt{5}^2-6-4\sqrt{5}}{3^2-4\cdot 5} = \dfrac{2\cdot 5-6-\sqrt{5}}{9-} = \dfrac{4-\sqrt{5}}{-11}$

Calcula y simplifica:

47. Calcula:

$$\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2 =$$

48. Calcula:

$$\left(7+\sqrt{7}\right)\cdot\left(7-\sqrt{7}\right) =$$

49. Racionaliza: $\dfrac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

04 LOGARITMOS

50. Utilizando la definición y/o las propiedades de los logaritmos, calcula:

a) $\log_2 \sqrt{2}$ b) $\log_5 25\sqrt{5}$ c) $\log_2\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$

d) $\log\left(\dfrac{1}{100}\right)^3$ e) $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$ f) $\log_2 0{,}5$

51. Expresa con un único logaritmo:

a) $2\log a + \log b - \log c$ b) $\frac{1}{2}(\log a - \log b)$ c) $2\log 3 - 3\log 2$

52. Utiliza el cambio de base y/o la calculadora para determinar con cuatro cifras significativas:

a) $\log_7 15$ b) $\log_2 11$ c) $\log 18$ d) $\ln 5$ f) $\log\left(\frac{8}{3}\right)$ g) $\log_{1/3} 7$

53. Calcula "x":

a) $\log_x 625 = 4$ b) $\log_x 0{,}01 = -2$ c) $5^x = 100$ d) $10^x = 5$

54. Calcula:

$a)\log_2 32;\ b)\log_2 \sqrt{8};\ c)\log_3 81;\ d)\log_2 \frac{16}{\sqrt{32}};\ e)\log_3 \sqrt[4]{27}$

55. Hallar el valor de 'x' en las siguientes expresiones:

$$a)\log_x \frac{1}{3} = -1 \quad b)\log x = -3 \quad c)\log_2 \frac{1}{8} = x$$

a) $\log_x \frac{1}{3} = -1$; $x^{-1} = \frac{1}{3}$; $\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$; $\boxed{x = 3}$

b) $\log x = -3$; $\boxed{x = 10^{-3} = 0'001}$

c) $\log_2 \frac{1}{8} = x$; $\frac{1}{8} = 2^x$; $2^{-3} = 2^x$; $\boxed{x = -3}$

56. Hallar el valor de 'x' aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$a)\ \log_2 \frac{x}{8} = 5 \quad b)\ \log \sqrt[x]{100} = 3 \quad c)\ \log_3 \frac{1}{x} = -2 \quad d)\log_3 81 = x$$

a) $\log_2 \frac{x}{8} = 5$; $\log_2 x - \log_2 8 = 5$; $\log_2 x - 3 = 5$

$\log_2 x = 8$; $x = 2^8 = \boxed{256}$

b) $\log \sqrt[x]{100} = 3$; $\frac{\log 100}{x} = 3$; $\frac{2}{x} = 3$; $\boxed{x = \frac{2}{3}}$

c) $\log_3 \frac{1}{x} = -2$; $\log_3 1 - \log_3 x = -2$; $0 - \log_3 x = -2$;

$\log_3 x = 2$; $\boxed{x = 3^2 = 9}$

d) $\log_3 81 = x$; $3^x = 81 = 3^4$; $\boxed{x = 4}$

57. Desarrolla al máximo utilizando las propiedades del logaritmo: *a*) $\log_a \sqrt[3]{\frac{1}{a^5}}$ *b*) $\log_a (a^2 \cdot \sqrt{a})$

a) $\log_a \sqrt[3]{\frac{1}{a^5}} = \frac{\log_a \frac{1}{a^5}}{3} = \frac{\log_a 1 - \log_a a^5}{3} = \frac{0-5}{3} = \frac{-5}{3}$

b) $\log_a (a^2 \cdot \sqrt{a}) = \log_a a^2 + \log_a \sqrt{a} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

58. Sabemos que $\log_a k = 0'7$, ¿cuánto vale? $\log_a k^3 - \log_a \sqrt{k}$

$\log_a k^3 - \log_a \sqrt{k} =$

$= 3 \log_a k - \frac{\log_a k}{2} = 3 \cdot 0'7 - \frac{0'7}{2} = 2'1 - 0'35 = 1'75$

59. Expresa como un solo logaritmo: $3 \cdot \log_3 6 - \log_3 15 + \frac{\log_3 64}{2}$

$$3\log_3 6 - \log_3 15 + \frac{\log_3 64}{2} =$$

$$= \log_3 6^3 - \log_3 15 + \log_3 \sqrt{64} =$$

$$= \log_3 \frac{6^3}{15} + \log_3 \sqrt{64} = \log_3 \frac{6^3 \cdot \sqrt{64}}{15}$$

60. Efectúa con la calculadora y redondea a cuatro cifras significativas:

$a.\, 1,41^{-20} \quad b.\, \sqrt[7]{3021} \quad c.\, \sqrt[9]{1,287.10^{-14}} \quad d.\, L\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

61. Utiliza las propiedades y/o la definición de logaritmo para calcular:

$$\log_3\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right) =$$

62. Expresa en un único logaritmo:

$$2\log a + \frac{1}{2}\log b - \log c =$$

63. Saber aplicar las propiedades de los logaritmos para simplificar una expresión. Hallar el valor de 'x' aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$a)\ \log 2^x = 10 \qquad b)\ \log_2 \frac{x}{8} = 5 \qquad c)\ \log \sqrt[x]{100} = 3 \qquad d)\ \log_3 \frac{1}{x} = -2$$

64. Convertir una expresión logarítmica en su exponencial equivalente y viceversa. Hallar el valor de 'x' en las siguientes expresiones: $a)\log_x \frac{1}{3} = -1 \ \ b)\log x = -3 \ \ c)\log_2 \frac{1}{8} = x$

65. Saber aplicar las propiedades de los logaritmos para simplificar una expresión. Hallar el valor de 'x' aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$a)\ \log_2 \frac{x}{8} = 5 \qquad b)\ \log \sqrt[n]{100} = 3 \qquad c)\ \log_3 \frac{1}{x} = -2 \qquad d)\log_3 81 = x$$

3. Hallar el valor desconocido en cada expresión según las propiedades de los logaritmos:

$$a)\log_3 \frac{x}{9}=2 \qquad b)\log\sqrt[3]{n}=2 \qquad c)\log_3\frac{1}{x}=-2 \qquad d)\log_3 20=x$$

a) $\log_3 \frac{x}{9}=2$; $\log_3 x-\log_3 9=2$; $\log_3 x=2+2=4$;
$\log_3 x=4$; $x=3^4=81$

b) $\log\sqrt[3]{n}=2$; $\frac{\log n}{3}=2$; $\log n=6$; $n=10^6=1000000$.

c) $\log_3\frac{1}{x}=-2$; $\log_3 1-\log_3 x=-2$; $0-\log_3 x=-2$;
$\log_3 x=2$; $x=3^2=9$; d) $\log_3 20=\frac{\log 20}{\log 3}\simeq 2'73$

1. Utilizando las propiedades del logaritmo calcula:

$$a)\log_2\sqrt{2};\ b)\log_5 25\cdot\sqrt{5};\ c)\log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)\ d)\log\left(\frac{1}{100}\right)^3;\ e)\ln\left(\frac{1}{e}\right);\ f)\log_2 0'5$$

a) $\log_2\sqrt{2}=\frac{\log_2 2}{2}=\frac{1}{2}$

b) $\log_5 25\cdot\sqrt{5}=\log_5 25+\log_5\sqrt{5}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

c) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)=\log_2 1-\log_2\sqrt[3]{4}=0-\frac{\log_2 4}{3}=-\frac{2}{3}$

d) $\log\left(\frac{1}{100}\right)^3=3\cdot\log\left(\frac{1}{100}\right)=3\left[\log 1-\log 100\right]=3\cdot(-2)=-6$

e) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\ln 1-\ln e=0-1=-1$

f) $\log_2 0'5=\log_2\frac{5}{10}=\log_2\frac{1}{2}=\log_2 1-\log_2 2=0-1=-1$

(3) Reduce a un solo radical simplificando cuanto sea posible: $\dfrac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt[6]{24}}$

④ Introducir dentro de la raíz los factores:

$$2 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot \sqrt[5]{a^2 \cdot b \cdot c^3}$$

⑤ Racionaliza y simplifica si es posible:

$$\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2}$$

⑥ Reduce a radicales semejantes y simplifica:

$$4a \cdot \sqrt[3]{40 \cdot a^4} - 6 \cdot \sqrt[3]{135 \cdot a^7}$$

⑦ Utilizando las propiedades del logaritmo calcula:

a) $\log_3 \sqrt{27}$; b) $\log_2 \frac{4}{\sqrt[3]{16}}$; c) $\log 0'001$

d) $\log_5 \left(\frac{1}{25}\right)^{-3}$; e) $\ln e \cdot \sqrt{e}$; f) $\log_2 0'25$

⑧ Reduce a un único logaritmo la expresión:

$$2\log x - 3\log(x+1) + \frac{5\log x}{2}$$

⑨ Calcula sabiendo que $\log_a k = 0'8$

$$\log_a \frac{1}{(k \cdot \sqrt{k})^3}$$

(10) Explica en qué consiste la densidad de los números racionales y si completan la recta numérica.

(3) Simplifica la expresión: $\dfrac{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[8]{12}}$

(3) Simplifica la expresión: $\dfrac{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[8]{12}} = \dfrac{\sqrt[8]{3^2}\cdot\sqrt[8]{2^4}}{\sqrt[8]{2^2\cdot 3}} = \sqrt[8]{\dfrac{3^{\cancel{2}}\cdot 2^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{2^2}\cdot\cancel{3}}} = \boxed{\sqrt[8]{12}}$

(4) Simplifica extrayendo factores del radical cuanto sea posible $\sqrt[3]{8a^6b^{10}}$

(4) Simplifica extrayendo factores del radical cuanto sea posible $\sqrt[3]{8a^6b^{10}} = \boxed{2\cdot a^2\cdot b^3\cdot\sqrt[3]{b}}$

(5) Racionaliza y simplifica: $\dfrac{8}{3-\sqrt{5}}$

(5) Racionaliza y simplifica: $\dfrac{8}{3-\sqrt{5}} = \dfrac{8\cdot(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \dfrac{8(3+\sqrt{5})}{4} = \boxed{2\cdot(3+\sqrt{5})}$

(6) Reduce a radicales semejantes y simplifica:

$$4\sqrt{12}-\frac{3}{2}\sqrt{48}+\frac{2}{3}\sqrt{27}+\sqrt{75}=$$

⑥ Reduce a radicales semejantes y simplifica:

$$4\sqrt{12}-\frac{3}{2}\sqrt{48}+\frac{2}{3}\sqrt{27}+\sqrt{75}=$$

$$4\cdot 2\sqrt{3}-\frac{3}{2}\cdot 4\sqrt{3}+\frac{2}{3}3\sqrt{3}+5\sqrt{3}=(8-6+2+5)\sqrt{3}=\boxed{9\cdot\sqrt{3}}$$

⑦ Utilizando propiedades del logaritmo calcula:

a) $\log_2\sqrt{2}$; b) $\log_5 25\cdot\sqrt{5}$; c) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$

d) $\log\left(\frac{1}{100}\right)^3$; e) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$; f) $\log_2 0'5$

⑦ a) $\log_2\sqrt{2}=\boxed{\frac{1}{2}}$; b) $\log_5 25+\log_5\sqrt{5}=2+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{5}{2}}$

c) $\log_2 1-\log_2\sqrt[3]{4}=0-\frac{2}{3}=\boxed{-\frac{2}{3}}$; d) $3(\log 1-\log 100)=3(-2)=\boxed{-6}$

e) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\ln 1-\ln e=0-1=\boxed{-1}$; f) $\log_2 0'5=\log_2\frac{1}{2}=\boxed{-1}$

⑧ Reduce a un único logaritmo la expresión:

$$\frac{2}{3}\log x+\frac{1}{5}\log y-3\log z$$

⑧ Reduce a un único logaritmo la expresión:

$$\frac{2}{3}\log x+\frac{1}{5}\log y-3\log z=\boxed{\log\left[\frac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[5]{y}}{z^3}\right]}$$

⑨ Calcula: $2\log_5 625-\log_9 81+\log_2 64$

⑨ Calcula: $2\log_5 625 - \log_9 81 + \log_2 64 =$

$= 2\cdot 4 - 2 + 6 = \boxed{12}$

1. La población mundial es de unos 5 mil millones de habitantes y crece a un ritmo anual del 1%. ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse?

$C = C_0 \cdot (1+r)^t$

$10 = 5 \cdot (1+0'01)^t$

$2 = 1'01^t$

$\log 2 = t \cdot \log 1'01$

$t = \dfrac{\log 2}{\log 1'01} = \boxed{69'66 \text{ años}}$

① Responder a los siguientes apartados:

a) Expresa en forma de intervalo los números reales menores o iguales que -7.

b) Expresa en forma de intervalo los números reales entre -3 -excluido- y $+5$ -incluido-.

c) Escribe como desigualdad: $(-\infty, -5]$

d) " " " : $(-3, 0]$

e) Escribe en forma de intervalo: $E(-3, 2)$

f) " " " : $E^*(-2, 4)$

① Responder a los siguientes apartados:

a) Expresa en forma de intervalo: Números reales mayores que 1

b) " " " " " : Números reales mayores o iguales que -2 y menores que 4.

c) Escribe en forma de desigualdad: $[-3,+\infty)$

d) " " " : $(-5,2]$

e) Escribe en forma de intervalo: $E(-2,5)$

f) " " de intervalos: $E^*(3,4)$

⑩ Clasifica los conjuntos numéricos racionales e irracionales según su expresión decimal y pon algún ejemplo de cada uno.

① Responder a los siguientes apartados:

a) Expresa en forma de intervalo: Números reales mayores que 1 $\boxed{(1,+\infty)}$

b) " " " " " : Números reales mayores o iguales que -2 y menores que 4. $\boxed{[2,4)}$

c) Escribe en forma de desigualdad: $[-3,+\infty)$ $\boxed{-3\leq x}$

d) " " " : $(-5,2]$ $\boxed{-5<x\leq 2}$

e) Escribe en forma de intervalo: $E(-2,5)=(-2-5,-2+5)=\boxed{(-7,3)}$

f) " " de intervalos: $E^*(3,4)=(3-4,3)\cup(3,3+4)=\boxed{(-1,3)\cup(3,7)}$